Linjära ekvationssystem

Ax = b

Teknisk-vetenskapliga beräkningar

Matriser som representation

Graf-teori

- Flöden : trafik, distribution, processorer, spelteori, logik, elektriska nätverk…

Linjära ekvationssystem

- Parameterestimering för modellfunktioner

2 Teknisk-vetenskapliga beräkningar Pedher Johansson Department of Computing Science, Umeå University

Manipulera matriser

Olika skäl

- Utföra transformationer
- Byta representation
- Lösa ekvationssystem

Krav

- Bevara olika egenskaper

3 Teknisk-vetenskapliga beräkningar Pedher Johansson Department of Computing Science, Umeå University

Linjär Algebra

- n obekanta och n ekvationer

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\ldots \\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n
\end{aligned}
$$

4 Teknisk-vetenskapliga beräkningar Pedher Johansson Department of Computing Science, Umeå University

Linjära ekvationssystem

- $Ax = b$ där A är en $n \times n$-matris och b är en $n \times 1$-vektor

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}
$$

5 Teknisk-vetenskapliga beräkningar Pedher Johansson Department of Computing Science, Umeå University

Kolumnerna i A

- Betrakta matrisen som en uppsättning kolumnvektorer
  $A = [a_{:1}\ a_{:2}\ a_{:3}\ \ldots\ a_{:n}]$
- b kan skrivas som en linjärkombination av kolumnerna i A
  $x_1a_{:1} + x_2a_{:2} + x_3a_{:3} + \ldots + x_na_{:n} = b$
- Om detta ska gälla för alla b måste kol. i A utgöra en bas för $\mathbb{R}^n$

6 Teknisk-vetenskapliga beräkningar Pedher Johansson Department of Computing Science, Umeå University

Underrum

Ett underrum till ett vektorrum måste uppfylla

- För två godtyckliga vektorer x och y måste summan $x + y$ tillhöra samma underrum
- Om en vektor x multipliceras med en skalär c så måste $c \cdot x$ vara kvar i rummet

Rummet $\mathbb{R}^3$ har underrummen :

- rummet självt, $\mathbb{R}^3$ (3 dimensioner)
- ett godtyckligt plan genom origo (2 dimensioner)
- en godtycklig linje genom origo (1 dimension)
- nollvektorn (0 dimensioner)

Viktiga begrepp

- Ortogonalitet $x^T y = 0$, samt $Q^T Q = I$
- Linjärt oberoende $Ax = 0 \leftrightarrow x = 0$
- Bas spänner upp vektorrum
- Värderum $\mathcal{R}(A) = \{ b \in \mathbb{R}^m \mid b = Ax, x \in \mathbb{R}^n \}$
- Nollrum $\mathcal{N}(A) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0 \}$
- Rang $\text{rang}(A) = \dim(\mathcal{R}(A))$

Kolumnerna i A

Exempel : A är en 3×3-matris

- $Ax = b$ kan lösas $\Leftrightarrow$ b ligger i det plan som spänns upp av A's kolumner .
- Detta rum kallas värderummet till A, $\mathcal{R}(A)$
- Lösningarna till $Ax = 0$ utgör nollrummet till A, $\mathcal{N}(A)$

Exempel

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{kol}_1 + \text{kol}_2 = \text{kol}_3$$

$\mathcal{R}(A)$ spänns upp av t.ex. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \notin \mathcal{N}(A) \quad \text{medan} \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} \in \mathcal{R}(A)$$

Entydig lösning till $Ax=b$

Ekvivalenta utsagor

- Kolumnerna i A utgör bas för $\mathbb{R}^n$
- Kolumnerna i A är linjärt oberoende
- A är ickesingulär
- A är inverterbar
- $Ax = 0 \Leftrightarrow x=0$
- $\det(A) \neq 0$

Handräkning

Vad gör man ?

- Nollställ varje kolumn under huvuddiagonalen
- gör samtidigt samma operationer på högerledet
- Lös det triangulära systemet med bakåtsubstitution
- Överför matrisen på triangulär form genom att eliminera obekanta ur ekvationerna

Triangulära system

Enkla att lösa

- Övertriangulär $U = \begin{bmatrix} 18 & -21 & -3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- Undertriangulär $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 \\ -2/3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

13 Teknisk-vetenskapliga beräkningar Pedher Johansson Department of Computing Science, Umeå University

Bakåtsubstitution

Lös $Ux = c$ där U övertriangulär
- alla diagonalelement $\neq 0$ förutsätts

$$x_n = c_n / u_{nn}$$
$$x_i = (c_i - \sum u_{ij} \cdot x_j) / u_{ii} \qquad i = n-1, n-2, \ldots, 1$$

```
»U\c
ans =
     1
     2
     1
```

14 Teknisk-vetenskapliga beräkningar Pedher Johansson Department of Computing Science, Umeå University

LU-faktorisering

- Gausselimination med partiell pivotering (på ickesingulär matris)

$$PA = LU$$

- Lös $Ax = b$

$$PAx = Pb$$
$$LUx = Pb$$
$$Ly = Pb$$
$$Ux = y$$

15 Teknisk-vetenskapliga beräkningar Pedher Johansson Department of Computing Science, Umeå University

Ax = b

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 18 & -21 & -2 \\ -6 & 12 & 3 \\ -12 & 24 & 7 \end{bmatrix}} x = \underset{b}{\begin{bmatrix} -27 \\ 21 \\ 43 \end{bmatrix}}$$

$$\underset{L}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 2 & 1 \end{bmatrix}} y = \underset{b}{\begin{bmatrix} -27 \\ 21 \\ 43 \end{bmatrix}} \Rightarrow y = \begin{bmatrix} -27 \\ 12 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} Ax &= b \\ LUx &= b \\ Ly &= b \\ Ux &= y \end{aligned}}$$

16 Teknisk-vetenskapliga beräkningar Pedher Johansson Department of Computing Science, Umeå University

Ux = y

$$\underset{U}{\begin{bmatrix} 18 & -21 & -3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} x = \underset{y}{\begin{bmatrix} -27 \\ 21 \\ 43 \end{bmatrix}} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} Ax &= b \\ LUx &= b \\ Ly &= b \\ Ux &= y \end{aligned}}$$

17 Teknisk-vetenskapliga beräkningar Pedher Johansson Department of Computing Science, Umeå University

Två svårigheter

- något diagonalelement blir $0 \Rightarrow$ byt rader
- ett diagonalelement väldigt litet, naturligt eller pga. avrundningsfel
  $\Rightarrow$ bra om elementen inte växer $|m| < 1$
  $\Rightarrow$ välj det största elementet i kolumnen.

18 Teknisk-vetenskapliga beräkningar Pedher Johansson Department of Computing Science, Umeå University

Pivotering

- Viktigt att pivot-elementen $\neq 0$
- Vi vill ha så stort pivot-elelemet som möjligt
  - (beloppet)
- Byt rader i matrisen (och i högerledet) för att ordna detta. (Pivotera)
- Genom detta blir alla multiplikatorer $m_{ik} = a_{ik}/a_{kk}$ till beloppet < 1

19 Teknisk-vetenskapliga beräkningar Pedher Johansson Department of Computing Science, Umeå University

Permutationer

- Att låta två rader byta plats kan utföras med matrismultiplikation från vänster

$$\begin{array}{ccccc} P & \cdot & A & = & P \cdot A \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -6 & 13 & 3 \\ 2 & 13 & 5 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} -6 & 13 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & 13 & 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

- En enhetsmatris med omkastade rader

20 Teknisk-vetenskapliga beräkningar Pedher Johansson Department of Computing Science, Umeå University

Permutationsmatriser

- Enkel - byter två (eller flera) rader
- En enkel permutationsmatris är symmetrisk

$$P^T = P^{-1}$$

- En produkt av permutationsmatriser är en permutationsmatris

$$P = P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_n$$

- Multiplikation med P från höger permuterar kolumner

21 Teknisk-vetenskapliga beräkningar Pedher Johansson Department of Computing Science, Umeå University

Pivotera inte.....

… när matrisen är

- Diagonaldominant

$$\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \left|a_{ij}\right| \leq \left|a_{ii}\right|, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

- symmetrisk och positivt definit

Förekommer t.ex. vid diskretisering av randvärdesproblem för diff.ekvationer

22 Teknisk-vetenskapliga beräkningar Pedher Johansson Department of Computing Science, Umeå University

Komplexitet / “Kostnad”

Samma A - olika b

- LU-uppdelningen återanvänds

Utan LU

- totalt c:a $\mathcal{O}(n^3/3)$ operationer

LU-faktoriseringen

- totalt c:a $\mathcal{O}(n^3/3)$ operationer

Framåt/bakåt substitutionen

- totalt c:a $\mathcal{O}(n^2/2)$ operationer

23 Teknisk-vetenskapliga beräkningar Pedher Johansson Department of Computing Science, Umeå University

Normer

- En vektornorm är ett mått på längden hos en vektor och uppfyller

$|| x || \geq 0$, för alla x

$|| x || = 0$ omm $x = 0$

$|| \alpha x || = |\alpha| \cdot || x ||$

$|| x+y || \leq || x || + || y ||$

24 Teknisk-vetenskapliga beräkningar Pedher Johansson Department of Computing Science, Umeå University

Olika vektornormer

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

- 1-norm $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
- 2-norm $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$
- ∞-norm $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$

25 Teknisk-vetenskapliga beräkningar Pedher Johansson Department of Computing Science, Umeå University

Felen

För en given vektornorm definieras

- absoluta felet $\|\Delta x\| = \|\hat{x} - x\|$
- relativa felet $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} = \frac{\|\hat{x} - x\|}{\|x\|}$

26 Teknisk-vetenskapliga beräkningar Pedher Johansson Department of Computing Science, Umeå University

Matrisnorm

Härleds från vektornomen

$$\|A\| = \max \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

En sådan matrisnorm satisfierar

- $||A|| \geq 0$, för alla A
- $||A|| = 0$ omm $A=0$
- $||\alpha A|| = |\alpha| \cdot ||A||$
- $||A+B|| \leq ||A||+||B||$

27 Teknisk-vetenskapliga beräkningar Pedher Johansson Department of Computing Science, Umeå University

Matrisnormer

- 1 - norm $\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$
- ∞-norm $\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$
- F-norm (Frobenius) $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^2}$
- 2-norm:
  roten ur största egenvärdet till $A^T A$
  = största singulära värdet

28 Teknisk-vetenskapliga beräkningar Pedher Johansson Department of Computing Science, Umeå University

Egenskaper

- $||A|| > 0$ om $A \neq 0$
- $||\alpha A|| = |\alpha| \cdot ||A||$ för varje skalär α
- $||A+B|| \leq ||A||+||B||$
- $||AB|| \leq ||A|| \cdot ||B||$
- $||Ax|| \leq ||A|| \cdot ||x||$ för varje vector x

29 Teknisk-vetenskapliga beräkningar Pedher Johansson Department of Computing Science, Umeå University

Konditionstal

- Det exakta systemet $Ax = b$, har den exakta lösningen x
- En störning i b ger en störning i x
  $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$
- Relativa störningen i lösningen blir

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \| A \| \cdot \| A^{-1} \| \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

30 Teknisk-vetenskapliga beräkningar Pedher Johansson Department of Computing Science, Umeå University

Egenskaper

- $\mathrm{cond}(A)=\|A\|\|A^{-1}\|$
- $\mathrm{cond}(A) \geq 1$
- $\mathrm{cond}(I) = 1$ (I = Identitetsmatrisen)
- $\mathrm{cond}(P) = 1$ (P = Permutationsmatris)
- $\mathrm{cond}(\alpha A) = \mathrm{cond}(A)$ (α = skalär)
- $\mathrm{cond}(D)=\dfrac{\max|d_i|}{\min|d_i|}$ (D = Diagonalmatris)

Jämför med determinant

- $\mathrm{cond}(A) \to \infty$ $A \to$ singulär
- $\det(A) = 0$ A singulär

- $\det(\alpha I_n) = \alpha^n$ godtyckligt litet för $|\alpha|< 1$
- $\mathrm{cond}(\alpha I_n) = \mathrm{cond}(I_n) = 1$

Välkonditionerad matris

1

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0.0001 & 1.0000 \\ 1.0000 & 1.0000 \end{bmatrix}}_{A_1} \backslash \underbrace{\begin{bmatrix} 2.0000 \\ 2.0001 \end{bmatrix}}_{b} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.0001 \\ 2.0000 \end{bmatrix}}_{x}$$

2

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0.0001 & 1.0000 \\ 1.0000 & 1.0000 \end{bmatrix}}_{A_1} \backslash \underbrace{\begin{bmatrix} 2.0000 \\ 2.0000 \end{bmatrix}}_{b} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 2.0000 \end{bmatrix}}_{x}$$

```
»norm(A1)
ans =
 2.0001
»cond(A1)
ans =
 2.618
```

Liten ändring i b ger liten ändring i x

Illa-konditionerad matris

1

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1.0000 & 1.0000 \\ 1.0000 & 1.0001 \end{bmatrix}}_{A_2} \backslash \underbrace{\begin{bmatrix} 2.0000 \\ 2.0000 \end{bmatrix}}_{b} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2.0000 \\ 0 \end{bmatrix}}_{x}$$

2

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1.0000 & 1.0000 \\ 1.0000 & 1.0001 \end{bmatrix}}_{A_2} \backslash \underbrace{\begin{bmatrix} 2.0000 \\ 2.0001 \end{bmatrix}}_{b} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1.0000 \\ 1.0000 \end{bmatrix}}_{x}$$

```
»norm(A2)
ans =
 2.0001
»cond(A2)
ans =

4.0002e+04
```

Liten ändring i b ger stor ändring i x

Slutsats

- Ändringen 10^{-4} i högerledet förstorades till en ändring av storleksordningen 1
- A_2 är nära singulär - stort konditionstal Oavsett numerisk metod så kommer vi inte ifrån detta!

- Även en väl-konditionerad matris kan förstöras av en dålig algoritm

Residualen $r = b - A\hat{x}$

- Liten residual garanterar inte korrekt lösning
- Korrekt lösning kan ha stor residual

A =

1.0000 1.0010

1.0000 1.0000

»cond(A) = 4.0020e+03

Liten residual

```
b1 =
    2.001
    2.000

x1 =
    1
    1

x2 =
    2
    0
```

```
>> norm(x1-x2)/norm(x1)  = 1
>> norm(b1-A*x2) = 1.0000e-03
```

37

Stor residual

```
b3 =
    1.000
    0

x3 =
    -1000
    1000

x4 =
    -1001
    -1000
```

```
>> norm(x3-x4)/norm(x3)  =
7.0711e-04
>> norm(b3-A*x4)  =  1.4142
```

38

Egenskaper som kan utnyttjas

- Symmetri — t.ex. $A^T=A$
- Pos.definit — $x^TAx > 0$, alla $x \neq 0$
- Band — t.ex. 
- Gleshet (se Matlabs sparse) — t.ex $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

39

Symmetriska pos.def. system

- A kan Cholesky-faktoriseras $A = LL^T$
- Kräver inte pivotering för num. stablilitet
- Bara halva matrisen behövs
- $n^3/6$ operationer (hälften mot LU)

40

Bandsystem

- Mycket likt vanlig LU
  - lagrar bara el ≠ 0
  - kortare loopar jmf med Gaussel.
  - pivotering kan öka bandbredden (max dubbelt)
- Pivotering behövs ofta inte för tridiagonala, för dessa är ofta antingen diagonaldominanta eller pos.def
- Faktoriseringen $O(\beta^2 \cdot n)$ β-bandbredden

41

Glesa system

- PDE ger upphov till glesa system som ofta löses bäst med iterativa metoder

42